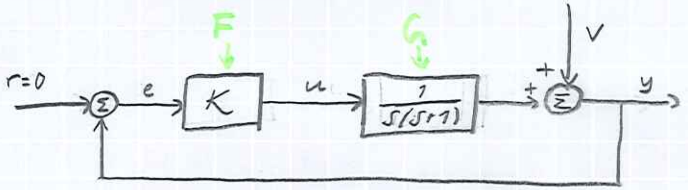
ÖVNING 9 (2017)

• Känslighet & Robusthet
• Tillståndsbeskrivning

6.11



UPPGIFT: • Bestäm $|S(j\omega)|$ vid $\omega = 1$ rad/s

• Hur välja K så att störning vid $\omega = 1$ rad/s ej förstärks?

TEORI: Känslighetsfunktion (BOK s. 61)

$$S(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}, \quad G_0(s) = F(s)G(s)$$

(• Överföringsfunktion $r \to e$
 ∟ $S(0)$ används för att beräkna statiskt reglerfel, se s. 62)

• Överföringsfunktion $v \to y$
 ∟ säger hur KÄNSLIGT systemet är mot störningar.

varför:

$$Y = V + GU = V + GFE = V + GF(R - Y)$$

$$Y + GFY = V + GFR$$

$$Y = \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_{S(s)} V + \underbrace{\frac{GF}{1+GF}}_{G_{cl}(s)} R$$

> Bortse från R ($R = 0$.) $\Rightarrow Y(s) = S(s)V(s)$

> Storleken på $S(s)$ (dvs. $|S(j\omega)|$ vid olika ω) avgör hur mycket störningen märks i utsignalen.

(Ideal: $|S(j\omega)| = 0 \ \forall \omega$)

LÖSNING:

$$S(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{1}{1+K\cdot\frac{1}{s(s+1)}} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+K}$$

$$\boxed{|S(j\cdot 1)| = \left|\frac{j(j+1)}{j(j+1)+K}\right| = \left|\frac{j-1}{j-1+K}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(K-1)^2+1}}}$$

Vi vill: $|S(j\cdot 1)| \leq 1$. (v förstärks ej)

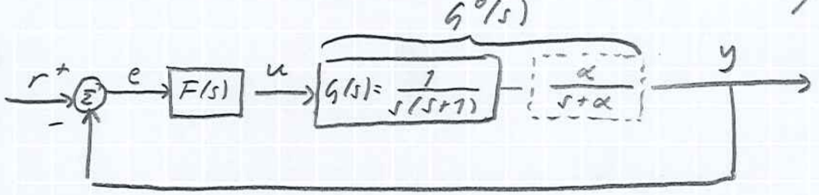
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(K-1)^2+1}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(K-1)^2+1} \geq 2$$

$$(K-1)^2 \geq 1$$

(förutsätter att $K > 0$)

$$\Rightarrow K \geq 2$$

6.7.1 MÅL: förstå robusthetskriteriet: vad händer vid modellfel?



GIVET:
- $F(s)=4$
- Bodediagram för $|G_{cl}(j\omega)|$
- Rotort m.a.p α.

a) Rotort: stabilt för vilka α?

- Poler i RHP för små α
- —"— VHP för stora α

Villkor för asymptotiskt stabilt: $\alpha > 3$.

b) Robusthetskriteriet

Resultat 6.2 (Boh s. 125)

- Antag modell $G(s)$, regleras med $F(s)$ så att systemet stabilt.
- Om $G(s)$ är felaktig, så att verkliga systemet är
$$G^0(s) = G(s)(1+\Delta_G(s)) \qquad (*)$$
- Så förblir slutna systemet stabilt med regulatorn $F(s)$ om
$$\boxed{|\Delta_G(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad \forall \omega}$$

OBS! VILLKOR:

V1) $G^0(s)$, $G(s)$ lika många poler i HHP

V2) $F(s)G(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$, $F(s)G^0(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

Def: $T(s) = 1 - S(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$ Komplementära känslighetsfunktionen

HÄR:

1) Identifiera $\Delta_G(s)$:

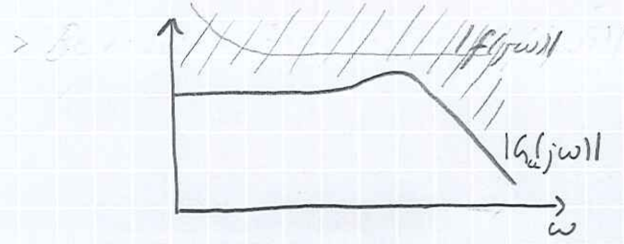
$$G^0(s) = G(s)\frac{\alpha}{s+\alpha} = G(s)\Big(1 + \underbrace{\frac{\alpha}{s+\alpha} - 1}_{\Delta_G(s)}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_G(s) = \frac{\alpha - s - \alpha}{s+\alpha} = -\frac{s}{s+\alpha}}$$

2) Robusthetskrit. (kolla v1, v2 uppfyllda!)

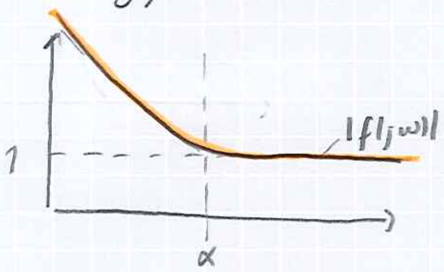
- Vi vill att $|T(j\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|} = \left|\frac{j\omega+\alpha}{-j\omega}\right| =: |f(j\omega)|$
- $|T(j\omega)| = \left|\frac{F(j\omega)G(j\omega)}{1+F(j\omega)G(j\omega)}\right| = |G_{cl}(j\omega)|$ ← GIVET i BODE-PLOT

$\Rightarrow$ KRAV: $|f(j\omega)| > |G_{cl}(j\omega)|$



→ Hur ser $|f(j\omega)|$ ut?

* små ω: $|f(j\omega)| \xrightarrow[\omega \to 0]{} \infty$
* lågfrekvensasymptot, lutning -1 $(p=1)$
* högfrekvensasymptot: lutning 0, $(n-m-p=0)$
  värde: $\lim_{\omega \to \infty} \left|\frac{j\omega+\alpha}{j\omega}\right| = 1$
* brytpunkt i α



SLUTSATS:
Om $|f(j\omega)|$ är större än $|G_{cL}(j\omega)|$ vid resonanstoppen så är den större för alla ω.

⇒ KRAV: $\boxed{|f(j\omega_R)| > |G_{cL}(j\omega_R)|}$

LÄS AV: $|G(j\omega_R)| = 2$, $\omega_R = 2$

$$|f(j\omega_R)| = \left|\frac{2j+\alpha}{-2j}\right| = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{2} > 2$$

$\overset{(\alpha>0)}{\Longrightarrow}$ $\alpha > \sqrt{12}$

c) • Robusthetskrit. kräver $\alpha > \sqrt{12} \approx 3{,}4$

• Rotort ger $\alpha > 3$

VARFÖR?

>Robusthetskriteriet är ett tillräckligt villkor för stabilitet ("⇒", "om")

>Poler strikt i VHP är tillräckligt och nödvändigt villkor ("⇔", "omm")

I detta fall blir robusthetskriteriet konservativt.

MEN: En fördel är att vi kan säga något om många olika modellfel.

ALLA Δ_G sådana att $\frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|} = |f(j\omega)| > |G_{cL}(j\omega)|$

är ju tillåtna, d.v.s. vi inser hur robusta vi är gentemot många olika fel utan att rita rotort för dem alla.

8.3| Skriv systemet på tillståndsform

Givet: > insignal u (M_1 och) i TA BORT M_1!

> utsignal y

1) Välj tillstånd:

• Notera: om $X = \frac{1}{s} Y$ så är $\dot{x} = y$

↳ Välj tillstånd utefter $\frac{1}{s}$-blocken (varje tillstånd får 1:a ordningens diff.ekv.)

så

$x_1 = y$, $x_2 = \theta$, $x_3 = z$; $u = i$, $y = x_1$

2) Relationer (från blockdiagram)

$$X_1(s) = Y(s) = \frac{1}{s} \cdot K_2 X_2(s)$$

$$X_2(s) = \Theta(s) = \frac{1}{s} \cdot (X_3(s) - X_1(s))$$

$$X_3(s) = Z(s) = \frac{1}{s} \cdot (M_1(s) - M_a(s)) = \frac{1}{s}(K_1 U(s) - K_2 X_2(s))$$

$\mathcal{L}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= K_2 x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= K_1 u(t) - K_2 x_2(t) \end{aligned}$$

3) På matrisform

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & K_2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

TEORI

ATT GÅ MELLAN ÖF OCH TILLSTÅNDSFORM

$$\text{ÖF} \xrightarrow{\text{flera sätt, bok s. 156-159}} \text{TILLSTÅND}$$

$$\xleftarrow{G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D}$$

(Gå tillbaka för att kolla att ni fick rätt! ss 2tf)

8.6|

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x$$

•SÖKES: ÖF

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + \cancel{D}^{=0}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} = \{\text{BETA}\}^{*} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+3+1 \\ s+2 \end{pmatrix}$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+4 \\ s+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} (-s-4+2s+4)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}}$$

$$* \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$