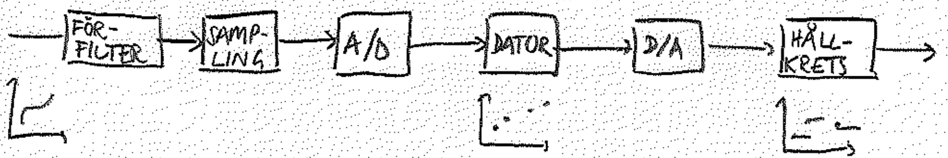
ÖVNING 13 2016

SISTA ÖVNINGEN!

Senast: Tillståndsåterkoppling
Framkoppling

Idag: Implementering

> VI IMPLEMENTERAR REGULATORER DIGITALT
>
> ↳ MÅSTE "ÖVERSÄTTA" REGULATORN TILL DISKRET TID.



> IDAG:
- HUR SAMPLAR VI?
- HUR REGLERAR VI I DISKRET TID?
- STABILITET FÖR DISKRETA SYSTEM

→ Differensapproximationer

$$\dot{u}(t) \approx \Delta u(t)$$

1. Euler bakåt:

$$\Delta_e u(t) = \frac{1}{T}(u(t) - u(t-T))$$

2. Tustins formel

$$\frac{1}{2}(\Delta_t u(t) + \Delta_t u(t-T)) = \frac{1}{T}(u(t) - u(t-T))$$

MEDELVÄRDET VID t OCH ETT TIDSSTEG BORT

11.1

$e \rightarrow \boxed{F} \rightarrow u$

Givet: Regulatorn $U(s) = \underbrace{KN\frac{s+b}{s+bN}}_{F(s)} E(s)$ (1)

Approximeras med Tustins formel som:

$$u(t) = \beta_1 u(t-T) + \alpha_1 e(t) + \alpha_2 e(t-T) \quad (2)$$

Uppgift: Bestäm $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ om $T=0,1$, $N=10$, $b=0,1$, $K=2$

Lösning:

(1) $\Longleftrightarrow$ $(s+bN)U(s) = KN(s+b)E(s)$

$\mathcal{L}^{-1}$: $\dot{u}(t) + bNu(t) = KN\dot{e}(t) + KNbe(t)$ (3)

Tustins formel:

$$\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\Delta_t x(t)}_{\approx \dot{x}(t)} + \underbrace{\Delta_t x(t-T)}_{\approx \dot{x}(t-T)}\Big) = \frac{1}{T}(x(t) - x(t-T)) \quad (4)$$

Vid tiden t approximeras (3) av:

$$\Delta_t u(t) + bNu(t) = KN\Delta_t e(t) + KNbe(t) \quad (5)$$

Vid tiden $t-T$ gäller:

$$\Delta_t u(t-T) + bNu(t-T) = KN\Delta_t e(t-T) + KNbe(t-T) \quad (6)$$

TRICK Summera (5)+(6):

$$\underbrace{\Delta_t u(t) + \Delta_t u(t-T)}_{(4) \Rightarrow \frac{2}{T}(u(t)-u(t-T))} + bNu(t) + bNu(t-T) = \underbrace{KN\Delta_t e(t) + KN\Delta_t e(t-T)}_{(4) \Rightarrow KN\cdot\frac{2}{T}(e(t)-e(t-T))} + KNbe(t) + KNbe(t-T)$$

Vi får

$$\frac{2}{T}u(t) - \frac{2}{T}u(t-T) + bNu(t) + bNu(t-T) = \frac{2}{T}KNe(t) - \frac{2}{T}KNe(t-T) + KNbe(t) + KNbe(t-T)$$

Sortera:

$$\left(bN+\frac{2}{T}\right)u(t) + \left(bN-\frac{2}{T}\right)u(t-T) = KN\left(b+\frac{2}{T}\right)e(t) + KN\left(b-\frac{2}{T}\right)e(t-T)$$

d.v.s.

$$u(t) = -\frac{bN-2/T}{bN+2/T}u(t-T) + KN\frac{b+2/T}{bN+2/T}e(t) + KN\frac{b-2/T}{bN+2/T}e(t-T)$$

Sätt in givna parametrar:

$$u(t) = -\frac{-19}{21}u(t-T) + 20\cdot\frac{20,1}{21}e(t) + 20\cdot\frac{-19}{21}e(t-T)$$

$\beta_1 = \frac{19}{21}$ $\alpha_1 = \frac{402}{21}$ $\alpha_2 = \frac{-398}{21}$

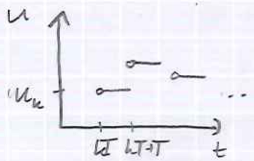
11.2

System $\dot{y}(t) = u(t)$ (1)

$\mathcal{L}$: 

• Styrsignalen hålls konstant över samplings-intervallet, dvs:

$u(t) = u_k \qquad kT \le t < (k+1)T$



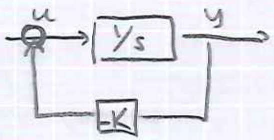
UPPGIFT

a) Beteckna $y(kT) =: y_k$

Härled relationen mellan y_k, y_{k+1}, u_k

b) Anta $u_k = -Ky_k$ och $y(0) = y_0$

för vilka K är systemet stabilt?



LÖSNING

a) $$y_{k+1} = y((k+1)T) = \underbrace{y(kT)}_{y_k} + \int_{kT}^{(k+1)T} \underbrace{\dot{y}(\tau)}_{(1)\Rightarrow \dot{y}(\tau)=u(\tau)} d\tau \qquad (2)$$

(analysens fundamentalsats)

$u(\tau) = u_k$ i hela intervallet som integreras!

$$\Rightarrow \int_{kT}^{(k+1)T} u(\tau)\,d\tau = u_k T \qquad (3)$$

(3), (2) $\Rightarrow$ $y_{k+1} = y_k + Tu_k$

b) $u_k = Ky_k \Rightarrow$

$$y_{k+1} = y_k - TKy_k = (1-TK)y_k$$

för ett givet k gäller:

$$y_k = (1-TK)y_{k-1} = (1-TK)(1-TK)y_{k-2} = \dots = (1-TK)^k y_0$$

Asymptotiskt stabilt om $|y_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

d.v.s. $(1-TK)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow$ $|1-TK| < 1$ (4)

eftersom $T>0$

(4) $\Leftrightarrow$ $0 < K < \frac{2}{T}$

11.3

$$u \rightarrow \boxed{\frac{1}{1+sT_1}} \xrightarrow{\bar{y}} \boxed{\text{Sampling}} \xrightarrow{y}$$

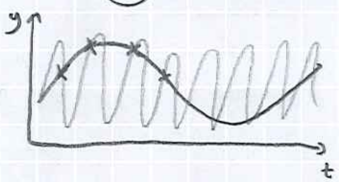
Givet: • Samplingsintervall T

• $u = u_0 + u_1$

u_0: "intressant" signal, $\omega_0 \in]0, \frac{\pi}{T}[$

u_1: "stör": $u_1(t) = \sin\omega_2 t$, $\omega_2 \in]\frac{\pi}{T}, \frac{2\pi}{T}[$

• Sampling orsakar aliasing



• frekvenser över Nyquistfrekvensen $\omega_N = \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$ döljs.

• Här

$$y = y_0 + y_1$$

där

$$y_1(kT) = A\sin(\omega_1 kT + \varphi), \quad \omega_1 < \pi/T$$

a) Vad är A, ω_1, φ?

STRATEGI:

1) kontinuerlig frekvenssvar

2) sampla

LÖSNING

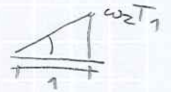
1) Betrakta $\bar{y}_1$. Frekvenssvar för $u_1(t) = \sin\omega_2 t$:

$$\bar{y}_1 = \bar{A}\sin(\omega_2 t + \bar{\varphi}) \qquad (*)$$

där

$$\bar{A} = |G(i\omega_2)| = \left|\frac{1}{1+i\omega_2 T_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 T_1^2}}$$

$$\bar{\varphi} = \arg(G(i\omega_2)) = \arg\frac{1}{1+i\omega_2 T_1} = -\arctan\omega_2 T_1$$



2) $\bar{y}_1$ i (*) kommer samplas till:

$$y_1(kT) = A\sin(\omega_1 kT + \varphi)$$

Vet att $\omega_2 \in]\frac{\pi}{T}, \frac{2\pi}{T}[$, men syns som $\omega_1 < \frac{\pi}{T}$.

(Kan alltså addera $\frac{2\pi}{T}$ till frekvensen utan att det syns.)

Här har vi:

$$y_1(kT) = \bar{A}\sin(\omega_2 kT + \bar{\varphi}) = \{\sin(\pi - x) = \sin x\} =$$

$$= \bar{A}\sin(\pi - \omega_2 kT - \bar{\varphi}) = \{\sin(x + 2\pi n) = \sin x\} =$$

$$= \bar{A}\sin(2\pi k + \pi - \omega_2 kT - \bar{\varphi}) = \{\text{kasta om}\} =$$

$$= \underbrace{\bar{A}}_{}\sin(\underbrace{(\tfrac{2\pi}{T} - \omega_2)}_{} kT + \underbrace{\pi - \bar{\varphi}}_{})$$

Identifiera: $\boxed{A \quad \omega_1 \quad \varphi}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 T_1^2}}; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} - \omega_2 = \omega_s - \omega_2; \quad \varphi = \pi + \arctan\omega_2 T_1$$

11.3 forts

b) NOTERA: T påverkar utsignalens amplitud.

> Hur liten amplitud kan vi få om vi ej vill dämpa u_0 med $\omega_0 \in]0, \frac{\pi}{T}[$ mer än $\sqrt{2}$ gånger.

> D.v.s. Dämpa signaler med $\omega \in]\frac{\pi}{T}, \frac{2\pi}{T}[$ maximalt, men signaler med $\omega < \frac{\pi}{T}$ mindre än med $\sqrt{2}$.

{OBS! Betyder att bandbredden är $\omega_B = \frac{\pi}{T}$}

LÖSNING:

> Alla signaler skalas enligt

$$\bar{A} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}$$

(monotont avtagande!)

> Villkoret uppfyllt om $\bar{A}(\omega = \frac{\pi}{T}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 T_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 1 + \frac{\pi}{T} T_1^2 = 2$$

$$T_1 = \frac{T}{\pi}$$

Då gäller att

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 \frac{T^2}{\pi^2}}}$$

är störningens amplitud.